# 第 2 节 常规的数列求和方法（★★★）

## 强化训练

### 类型Ⅰ：错位相减与裂项相消

1.（★★）设 $a_n=(2n-1)\cdot 3^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

**解**：（数列 $\{2n-1\}$ 是等差数列，$\{3^n\}$ 是等比数列，两者相乘可用错位相减法求其前 $n$ 项和）

由题意，$\begin{cases}S_n=1\times3^1+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n & ①\\ 3S_n=\quad 1\times3^2+3\times3^3+5\times3^4+\cdots+(2n-3)\cdot3^n+(2n-1)\cdot3^{n+1} & ②\end{cases}$，

所以①－②可得 $-2S_n=3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^n-(2n-1)\cdot3^{n+1}$，

（去除首尾两项，中间的 $2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^n$ 是等比数列求和，共 $n-1$ 项）

故 $-2S_n=3+\dfrac{2\times3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot3^{n+1}=3+3^2(3^{n-1}-1)-(2n-1)\cdot3^{n+1}=2(1-n)\cdot3^{n+1}-6$，所以 $S_n=(n-1)\cdot3^{n+1}+3$.

2.（2023•辽宁模拟•★★）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\neq1$，且 $a_1=2$，$2a_1+a_3=3a_2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，求数列 $\{\dfrac{n}{S_n+2}\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$，证明：$T_n<1$.



**解**：（1）因为 $2a_1+a_3=3a_2$，所以 $2a_1+a_1q^2=3a_1q$，故 $2+q^2=3q$，解得：$q=2$ 或 1，

又 $q\neq1$，所以 $q=2$，故 $a_n=a_1q^{n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$.

（2）由（1）可得 $S_n=2+2^2+\cdots+2^n=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，所以 $\dfrac{n}{S_n+2}=\dfrac{n}{2^{n+1}-2+2}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$，

（像 $\dfrac{n}{2^{n+1}}$ 这种 $\dfrac{等差}{等比}$ 的分式结构，可在和式两端同乘以分母的公比来错位）

故 $\begin{cases}T_n=\quad\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}} & ①\\ 2T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n} & ②\end{cases}$，

②－①可得：$T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-(\dfrac{1}{2})^n-\dfrac{n}{2^{n+1}}$，

（要进一步化简，可将 $(\dfrac{1}{2})^n$ 变形成 $\dfrac{2}{2^{n+1}}$，调整为与 $\dfrac{n}{2^{n+1}}$ 次数相同的结构）

所以 $T_n=1-\dfrac{2}{2^{n+1}}-\dfrac{n}{2^{n+1}}=1-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$，因为 $\dfrac{n+2}{2^{n+1}}>0$，所以 $T_n<1$.

3.（★★★）在各项均为正数的等差数列$\{a_n\}$中，$a_1$，$a_2$，$a_6$构成公比不为1的等比数列，$S_n$是数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和.

（1）若$a_1=\dfrac{1}{3}$，设$b_n=a_n+\dfrac{2}{3}$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$；

（2）若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>\dfrac{1}{a_1}$，证明：$a_1<\dfrac{1}{3}$.

**解：**（1）设$\{a_n\}$的公差为$d$，因为$a_1$，$a_2$，$a_6$构成公比不为1的等比数列，所以$d\neq 0$，且$a_2^2=a_1a_6$，

故$(a_1+d)^2=a_1(a_1+5d)$，整理得：$d=3a_1$，所以$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+(n-1)\cdot 3a_1=(3n-2)a_1$，

结合$a_1=\dfrac{1}{3}$可得$a_n=n-\dfrac{2}{3}$，所以$b_n=a_n+\dfrac{2}{3}=n$，故$\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，（分母为前后项关系，考虑裂项求和）

所以$\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，故$T_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

（2）由（1）可得$a_n=(3n-2)a_1$，（尽管$a_1$未知，但$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$的分母仍为前后项关系，可裂项求和）

因为$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}})$，所以$S_n=\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}+\cdots$

$+\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}})=\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}})$，故$S_n>\dfrac{1}{a_1}$即为$\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}})>\dfrac{1}{a_1}$，



（要证的是$a_1<\dfrac{1}{3}$，故全部用$a_1$表示）

所以$\dfrac{1}{3a_1}[\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{(3n+1)a_1}]>\dfrac{1}{a_1}$ ①，因为$\{a_n\}$各项均为正数，

所以$a_1>0$，故由式①整理得：$a_1<\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{3n+1})$，

因为$\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{3n+1})<\dfrac{1}{3}$，所以$a_1<\dfrac{1}{3}$.

4.（★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，并求$a_n$；

（2）若$b_n=4a_na_{n+2}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

**解：**（1）（要证$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，只需证$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$为常数，可将条件中的递推公式代入，消去$a_{n+1}$并化简）

因为$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2a_n+1}{a_n}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2a_n}{a_n}=2$，

故$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是首项为$\dfrac{1}{a_1}=1$，公差为2的等差数列，所以$\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

（2）由（1）可得 $b_n=\dfrac{4}{(2n-1)[2(n+2)-1]}=\dfrac{4}{(2n-1)(2n+3)}$，

（注意到分母是数列 $\{2n-1\}$ 的间隔项，故考虑裂项求和）

所以 $b_n=\dfrac{4}{(2n-1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+3}$，从而 $T_n=$

$1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+3}$，

（为了看出抵消后剩哪些，可先将整个式子调整顺序，按符号进行分组）

故 $T_n=(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-3}+\dfrac{1}{2n-1})-(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3})$

$=1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}$.

5.（2023•兰州模拟•★★★）已知等差数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，其前 $n$ 项和为 $S_n$，$S_6=36$，且 $a_1$，$a_2$，$a_5$ 成等比数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，若 $T_n$ 为数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和，且存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $T_n-\lambda a_{n+1}\ge 0$ 成立，求实数 $\lambda$ 的取值范围.

**解：**（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，因为 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $d>0$，又 $S_6=36$，所以 $6a_1+15d=36$ ①，



因为 $a_1$，$a_2$，$a_5$ 成等比数列，所以 $a_2^2=a_1a_5$，故 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，结合 $d>0$ 整理得：$d=2a_1$，

代入①可得 $a_1=1$，所以 $d=2$，故 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

（2）（看到 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，想到裂项）由（1）可得 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})$，故 $T_n-\lambda a_{n+1}\ge 0$ 即为 $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})-\lambda(2n+1)\ge 0$，

（这是含参不等式问题，可将参数 $\lambda$ 分离出来）所以 $\lambda\le\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})\cdot\dfrac{1}{2n+1}$ ②，

（问题等价于存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使②成立，只需 $\lambda\le[\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})\cdot\dfrac{1}{2n+1}]_{\max}$，要求该最大值，可将 $\dfrac{1}{2n+1}$ 换元）

令 $t=\dfrac{1}{2n+1}$，则 $t$ 随 $n$ 的增大而减小，所以 $t_{\max}=\dfrac{1}{3}$，又 $t>0$，所以 $0<t\le\dfrac{1}{3}$，

而 $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})\cdot\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}(1-t)t$，因为函数 $y=\dfrac{1}{2}(1-t)t$ 在 $(0,\dfrac{1}{3}]$ 上↗，所以当 $t=\dfrac{1}{3}$ 时，$y$ 取得最大值 $\dfrac{1}{9}$，

此时 $n=1$，故 $\lambda\le\dfrac{1}{9}$，即 $\lambda$ 的取值范围是 $(-\infty,\dfrac{1}{9}]$.

6.（2022•山西模拟•★★★）已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_na_{n+2}=2a_{n+1}^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2 a_{n+1}$，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，求数列 $\{\lg S_n\}$ 的前 99 项和.

**解：**（1）因为 $a_na_{n+2}=2a_{n+1}^2$，所以 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，又 $a_1=1$，$a_2=2$，所以 $\dfrac{a_2}{a_1}=2$，

故数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，（要由此式求 $a_n$，可用累乘法）

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdots 2^2\cdot 2^1\cdot 1=2^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

（2）由（1）可得 $b_n=\log_2 a_{n+1}=\log_2 2^{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，

从而 $S_n=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=2(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}$，

故 $\lg S_n=\lg\dfrac{2n}{n+1}$，所以 $\lg S_1+\lg S_2+\cdots+\lg S_{99}=\lg\dfrac{2\times 1}{2}+\lg\dfrac{2\times 2}{3}+\lg\dfrac{2\times 3}{4}+\cdots+\lg\dfrac{2\times 99}{100}$

$=\lg(\dfrac{2\times 1}{2}\times\dfrac{2\times 2}{3}\times\dfrac{2\times 3}{4}\times\cdots\times\dfrac{2\times 99}{100})=\lg(2^{99}\times\dfrac{1}{100})=\lg 2^{99}+\lg\dfrac{1}{100}=99\lg 2-2$.

7.（2022 •深圳模拟 •★★★★）设首项为 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项积为 $T_n$，且满足 $a_na_{n+1}=(n+1)a_n-na_{n+1}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；



（2）设数列 $\left\{\dfrac{n}{T_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，求证：$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}<\dfrac{3}{4}$.

参考公式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**解：**（1）（所给递推公式有大下标对应小系数，小下标对应大系数的现象，故用同除法变形，将 $a_n$ 与 $a_{n+1}$ 分离）

由 $a_na_{n+1}=(n+1)a_n-na_{n+1}$ 两端同除以 $a_na_{n+1}$ 可得 $\dfrac{n+1}{a_{n+1}}-\dfrac{n}{a_n}=1$，

又 $a_1=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{a_1}=2$，故数列 $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，

所以 $\dfrac{n}{a_n}=2+(n-1)\times 1=n+1$，故 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$.

（2）由（1）可得 $T_n=a_1a_2\cdots a_n=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$，所以 $\dfrac{n}{T_n}=n^2+n$，

故 $S_n=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{3}{n(n+1)(n+2)}$，

（观察上式的结构，可猜想用裂项相消法求和，为了凑出前后项的关系，可分子分母同乘以 $n+1$，将分母化为 $n(n+1)$ 与 $(n+1)(n+2)$ 之积，前后项关系就出来了）

$$\frac{1}{S_n}=\frac{3(n+1)}{[n(n+1)]\cdot[(n+1)(n+2)]}=\frac{3}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}],$$

所以$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{3}{2}[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$

$=\frac{3}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]=\frac{3}{4}-\frac{3}{2(n+1)(n+2)}<\frac{3}{4}$.

**类型Ⅱ：分组求和与倒序相加**

8.（★★★）数列 1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，⋯，1，2，4，⋯，$2^{n-1}$，⋯ 的前 60 项和$S_{60}=$_____.

**答案：**2067

**解析：**观察所给数列发现若按$\{1\}$，$\{1,2\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,4,8\}$，⋯分组，则每组都是等比数列，可以求和，

按上述规则分组，则第 $n$ 组共有 $n$ 项，第 $n$ 组的和为$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

要求原数列的前 60 项和，需先分析前 60 项共有几组，

因为$1+2+\cdots+10=\frac{10\times(1+10)}{2}=55<60$，$1+2+\cdots+11=\frac{11\times(1+11)}{2}=66>60$，

所以原数列的前 60 项应包含前 10 组，以及第 11 组的前 5 项，

于是对数列$\{2^n-1\}$求前 10 项和，可得到原数列前 10 组的和，再加上第 11 组的前 5 项即得 $S_{60}$，

故 $S_{60}=(2^1-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^{10}-1)+(1+2+4+8+16)=(2^1+2^2+\cdots+2^{10})-10+31=\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}+21=2067$.



9.（2023•辽宁沈阳模拟•★★★）已知函数 $f(x+\frac{1}{2})$ 为奇函数，且 $g(x)=f(x)+1$，若 $a_n=g(\frac{n}{2023})$，则数列$\{a_n\}$的前 2022 项和为_____.

**答案：**2022

**解析：**由题意，$a_1+a_2+\cdots+a_{2021}+a_{2022}=$

$g(\frac{1}{2023})+g(\frac{2}{2023})+\cdots+g(\frac{2021}{2023})+g(\frac{2022}{2023})$ ①，

上式与函数 $g(x)$ 有关，故先由条件分析 $g(x)$ 的性质，

将 $f(x)$ 左移$\frac{1}{2}$个单位得到奇函数 $f(x+\frac{1}{2})$，该函数关于原点对称，所以 $f(x)$ 关于点$(\frac{1}{2},0)$对称，

又 $g(x)=f(x)+1$，所以将 $f(x)$ 上移 1 个单位可得到 $g(x)$，

从而 $g(x)$ 关于点$(\frac{1}{2},1)$对称，故 $g(x)+g(1-x)=2$，

由此可发现在求式①的值时，应将自变量之和为 1 的两项组合，为了便于观察，我们用倒序相加法，

记 $S=g(\frac{1}{2023})+g(\frac{2}{2023})+\cdots+g(\frac{2021}{2023})+g(\frac{2022}{2023})$ ②，

则 $S=g(\frac{2022}{2023})+g(\frac{2021}{2023})+\cdots+g(\frac{2}{2023})+g(\frac{1}{2023})$ ③，

②+③可得 $2S=[g(\frac{1}{2023})+g(\frac{2022}{2023})]+[g(\frac{2}{2023})+g(\frac{2021}{2023})]$

$+\cdots+[g(\frac{2022}{2023})+g(\frac{1}{2023})]=2+2+\cdots+2=2\times2022$，

所以 $S=2022$.

10.（2023•北京模拟•★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=n\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 2023 项和为（　　）

（A）$-2025$　　（B）$-2023$　　（C）$-2$　　（D）0

**答案**：A

**解析**：已知 $\{a_n\}$ 的通项，故先把 $\{b_n\}$ 的和化为 $\{a_n\}$ 的和，

由题意，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2023}=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2023}+a_{2024})=a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_{2023})+a_{2024}$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_{2024})-a_1-a_{2024}$ ①，

由于 $\sin\frac{n\pi}{2}$ 的周期为 4，故求和时考虑按 4 项为一组来分组，不妨先列几项来看看规律，

数列 $\{a_n\}$ 中的项依次为 1，0，$-3$，0，5，0，$-7$，0，…

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=a_5+a_6+a_7+a_8=\cdots=-2$，

故 $a_1+a_2+\cdots+a_{2024}=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\cdots+(a_{2021}+a_{2022}+a_{2023}+a_{2024})=506\times(-2)=-1012$，

又 $a_1=1$，$a_{2024}=2024\times\sin\frac{2024\pi}{2}=0$，



代入①得 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2023}=2\times(-1012)-1=-2025$.

11.（★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2a_n+\log_2(\log_2a_n)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

**解**：（1）（受第二问 $b_n$ 的结构的启发，我们可以试试将题干的递推公式两端取对数来看）

因为 $a_{n+1}=a_n^2$，所以 $\log_2a_{n+1}=\log_2a_n^2=2\log_2a_n$，

又 $a_1=2$，所以 $\log_2a_1=1$，故 $\{\log_2a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，

所以 $\log_2a_n=2^{n-1}$，故 $a_n=2^{2^{n-1}}$.

（2）由（1）可得 $b_n=\log_2 2^{2^{n-1}}+\log_2(\log_2 2^{2^{n-1}})=2^{n-1}+\log_2(2^{n-1})=2^{n-1}+n-1$，

（$2^{n-1}$ 和 $n-1$ 分别为等比、等差数列，各自都能求和，故将它们分别求和再相加，即得 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和）

所以 $S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(0+n-1)}{2}=2^n-1+\frac{n(n-1)}{2}$.

**【反思】**涉及 $a_{n+1}=a_n^k(k$ 为常数$)$ 这类递推公式，可考虑两端取对数，构造等比数列求通项.

12.（2022•西安模拟改•★★★）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号. 设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，则 $f(x)=[x]$ 称为高斯函数. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，

且 $(n+1)a_{n+1}-na_n=2n+1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）若 $b_n=[\lg a_n]$，数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，求 $T_{2022}$.

**解**:（1）（把 $na_n$ 看作 $c_n$，则所给递推公式属于 $c_{n+1}-c_n=f(n)$ 这种结构，可先用累加法求出 $c_n$）

设 $c_n=na_n$，则 $c_1=a_1=1$，且 $(n+1)a_{n+1}-na_n=2n+1$ 即为 $c_{n+1}-c_n=2n+1$，

所以当 $n\geq 2$ 时，$\begin{cases} c_2-c_1=3 \\ c_3-c_2=5 \\ \quad\cdots\cdots \\ c_n-c_{n-1}=2n-1 \end{cases}$，将以上各式相加可得 $c_n-c_1=3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$，

从而 $c_n=c_1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，

故 $na_n=n^2$，所以 $a_n=n$，又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=n$.

（2）由（1）可得 $b_n=[\lg a_n]=[\lg n]$，

（要求 $T_{2022}$，可先分析 $b_n$ 的取值情况，寻找规律）

当 $1\leq n\leq 9$ 时，$0\leq \lg n<1$，所以 $b_n=[\lg n]=0$；

当 $10\leq n\leq 99$ 时，$1\leq \lg n<2$，所以 $b_n=[\lg n]=1$；

当 $100\leq n\leq 999$ 时，$2\leq \lg n<3$，所以 $b_n=[\lg n]=2$；

当 $1000\leq n\leq 2022$ 时，$3\leq \lg n<4$，所以 $b_n=[\lg n]=3$；



故 $T_{2022}=1\times 90+2\times 900+3\times 1023=4959$.